# ערכים ווקטורים עצמיים, דמיון מטריצות, ומטריצה לכסינה

## ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

תהי A מטריצה ריבועית מסדר גודל n x n, ויהי v וקטור השונה מוקטור ה-0, ויהי 𝜆 סקלר. אם מתקיים: A∙v = 𝜆∙v - אזי 𝜆הוא "ערך עצמי" (eigenvalue) של A, ו-v הוא "וקטור עצמי" (eigenvector) של A התואם ל-𝜆.

אם v הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי 𝜆, אז לכל 𝛼∙v, כאשר 𝛼 סקלר, הוא גם וקטור עצמי של A עם אותו ערך עצמי 𝜆. אנו נתייחס לכל 𝛼∙v כאל וקטור עצמי אחד. מספר הוקטורים העצמיים והערכים העצמיים בכל מטריצה ריבועית מסדר גודל n x n, יהיה בין 1 ל-n אך לא יותר.

## מציאת ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

### מציאת ערכים עצמיים

נתונה מטריצה ריבועית A מסדר גודל n x n. צריך למצוא וקטור v וסקלר 𝜆 כך שמתקיים: A∙v = 𝜆∙v. נשים לב כי מתקיים: A∙v - 𝜆∙v = (A - 𝜆∙I)∙v = A∙v = 𝜆∙v .



קיבלנו מערכת משוואות הומוגנית כאשר וקטור v הוא וקטור הנעלמים (x1, x2, …, xn). למערכת משוואות הומוגניות תמיד יש פתרון טריוויאלי, אולם מטרתנו לפי איך שהגדרנו וקטור עצמי בסעיף קודם היא לקבל אינסוף פתרונות, כלומר שנקבל וקטור שלפחות אחד המשתנים בו חופשי. אחת המסקנות של "משפט העקרונות השקולים"[[1]](#footnote-1), היא שאם במטריצה ריבועית הדטרמיננטה שונה מ-0 אזי יש לה פתרון יחיד. לכן אנו נחפש מתי הדטרמיננטה של המטריצה (A - 𝜆∙I) שווה ל-0.

Det(A - 𝜆∙I) = |A - 𝜆∙𝐼| = 0.

בעזרת משוואה זו נוכל למצוא את הערכים העצמיים 𝜆 של המטריצה A.

### מציאת וקטורים עצמיים

לאחר שמצאנו את הערכים העצמיים נוכל למצוא את הוקטורים העצמיים. כדי למצוא אותם צריך לפתור: A∙v = 𝜆∙vאו בצורה יותר נוחה: (A − 𝜆∙𝐼) v = . משוואה זו היא בעצם מערכת משוואות הומוגנית. נפתור את המערכת, נמצא את כל ערכי המשתנים, ונציב אותם חזרה בוקטור v. במידה והוא אינו וקטור ה-0, נפרק את v לפי מספר הפרמטרים החופשיים שבו. כל וקטור כזה נאמר שהוא הוקטור העצמי של A עבור הערך העצמי 𝜆.

במקרים בהם יש יותר מערך עצמי אחד יש להציב כל פעם ערך עצמי אחר ולמצוא את הוקטוריים העצמיים של A עבור אותו ערך עצמי 𝜆1, 𝜆2, …, 𝜆n. וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם בלתי תלויים לינארית (בת"ל).

### ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי

נשים לב שבדרך החישוב של הדטרמיננטה של המטריצה (A - 𝜆∙I), נקבל פולינום שהמשתנה בו הוא 𝜆 והדרגה שלו היא n. פולינום זה נקרא "הפולינום האופייני של A", והשורשים שלו הם בדיוק הערכים העצמיים של A.

לפי "המשפט היסודי של האלגברה" לכל פולינום בדרגה n יש בדיוק n שורשים עם כפילויות. כלומר כאשר נחשב את הערכים העצמיים תמיד נקבל n ערכים, אולם יכול להיות שנקבל את אותו ערך מספר פעמים, כמו במשוואה הבאה: (𝜆 – 2)3 = 0, שאז נקבל שלושה ערכים עצמיים שכולם שווים ל-2. במקרה שכזה נאמר "שהריבוי האלגברי" של 𝜆 הוא שלוש. בבואנו לחשב את הוקטורים העצמיים, מספר הוקטורים שנקבל יהיה לפי מספר המשתנים החופשים בפתרון המטריצה. מספר המשתנים החופשיים הוא "הריבוי הגיאומטרי" של 𝜆. תמיד מתקיים: ריבוי אלגברי ריבוי גאומטרי 1. המסקנה היא שלא תמיד נקבל n ערכים עצמיים שונים ו-n וקטורים עצמיים, אלא לעיתים נקבל גם פחות מכך.

בנוסף, לפי המשפט היסודי של האלגברה תמיד יש n פתרונות, אולם לא בהכרח שכולם ממשיים אלא יכול להיות שהפתרונות הם גם מספרים מרוכבים. במקרה זה גם הוקטורים העצמיים יהיו מרוכבים.

## הפולינום האופייני

כמו שאמרנו, הפולינום האופייני של מטריצה A מסדר גודל n x n הוא פולינום המתקבל מהחישוב det(A - 𝜆∙I) = 0, שהמשתנה בו הוא 𝜆 והדרגה שלו היא n. הוא יראה כך:

PA(𝜆) = Cn∙𝜆n + Cn-1∙𝜆n-1 +…+ C1∙𝜆 + C0

### תכונות הפולינום האופייני

1. Cn = (-1)n
2. Cn-1 = (-1)n-1∙tr(A)
3. C0 = det(A)

כלומר הפולינום האופייני מגלה לנו את det(A) ואת tr(A) גם בלי לראות את המטריצה.

### מציאת ערכים עצמיים בפולינום מדרגה גבוהה

בחלק מהמטריצות נקבל פולינום אופייני בדרגה גבוהה מאוד שיהיה נורא קשה לחשב את השורשים שלו, שהם בעצם הערכים העצמיים של המטריצה. במקרים אלו נוכל להיעזר במשפט הבא:

משפט: נתון פולינום P(x) = an∙xn + an-1∙xn-1 +…+ a1∙x + a0  עם מקדמים שלמים. אזי:

1. אם יש לפולינום שורש שלם אז הוא בהכרח מחלק את a0.
2. אם יש לפולינום שורש רציונלי אז בהכרח המונה בשורש מחלק את a0 והמכנה מחלק את an.

בעזרת משפט זה נוכל למצוא את שורשי הפולינום באמצעות הפעולות הבאות: ניקח את כל המספרים השלמים והרציונליים המועמדים להיות שורש הפולינום לפי המשפט, ונציב אותם בפולינום לראות איזה מהם הוא אכן השורש של הפולינום.

לאחר מכן כדי למצוא את כל השורשים הלא רציונליים נשתמש במשפט בזו[[2]](#footnote-2) ונחלק את p(x) ב-(x-a). נחפש שורשים לתוצאת החילוק שהם יהיו גם השורשים ל-p(x).

## משפט קיילי - המילטון

תהי A מטריצה ריבועית מסדר גודל n x n. המשפט אומר שאם נציב בפולינום האופייני של A PA(𝜆) = Cn∙𝜆n + Cn-1∙𝜆n-1 +…+ C1∙𝜆 + C0, במקום 𝜆 את A נקבל בפולינום האופייני את מטריצת ה-0, כלומר PA(A) = 0.

הערה - את המספר הקבוע בפולינום C0 נכפיל במטריצת היחידה בגודל n x n, כדי שנוכל לחבר איבר זה עם שאר האיברים שהם מטריצות.

### שימושים למשפט

1. **מציאת מטריצה הופכית** - ניקח את הפולינום האופייני של A שהצבנו בו במקום 𝜆 את A ונקבל לפי משפט קיילי - המילטון: PA(A) = Cn∙An + Cn-1∙An-1 +…+ C1∙A + C0∙I = 0. כעת נכפיל את שני האגפים במטריצה ההופכית A-1 ונקבל: Cn∙An-1 + Cn-1∙An-2 +…+ C1∙I + C0∙A-1 = 0. במצב זה נוכל לבודד את A-1 כך: A-1 = -1/C0(Cn∙An-1 + Cn-1∙An-2 +…+ C1∙I).
2. **מציאת חזקה גבוהה של מטריצה An** - נחלק את An בפולינום האופייני של A בחילוק ארוך. נסמן את הפלינום האופייני C, את תוצאת החילוק Q, ואת השארית R, כאשר בכולם המשתנה הוא 𝜆. נשים לב כי מתקיים: An = C∙Q + R. אם נציב במקום 𝜆 את A, אזי לפי משפט קיילי - המילטון C = 0. ואזי נקבל כי An = R. במילים אחרות, An שווה לשארית של החלוקה של An בפולינום האופייני של A, אלא שבמקום 𝜆 נציב את A.

## מרחב עצמי

תהי A מטריצה ריבועית מסדר גודל n x n, ויהי 𝜆 סקלר. אז "המרחב העצמי" של A ו- 𝜆הוא מרחב המכיל את כל הוקטורים בגודל n שהם וקטורים עצמיים של A עבור הערך העצמי 𝜆. אלא שמרחב זה כולל גם את וקטור ה-. VA(𝜆) = {vRn : A∙v=𝜆∙v} .

כבר אמרנו (סעיף א') שאם v הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי 𝜆, אז לכל 𝛼∙v, כאשר 𝛼 סקלר, הוא גם וקטור עצמי של A עם אותו ערך עצמי 𝜆. לכן כל הוקטורים מסוג 𝛼∙vVA(𝜆). מספר הוקטורים במרחב העצמי שאינם תלויים לינארית, כלומר המימד של המרחב העצמי dim(VA(𝜆)), שווה לריבוי הגיאומטרי של 𝜆. עבור 𝜆 שאינו ערך עצמי המרחב העצמי של A ו- 𝜆מכיל אך ורק את וקטור ה-0, מפני שלכל A ו-𝜆 מתקיים: A∙=𝜆∙, ולכן המימד יהיה גם כן 0.

המרחב העצמי הוא תת מרחב של Rn (או Cn) מפני שמקיים את התנאים הנצרכים לתת מרחב:

1. מכיל את וקטור ה-0, מפני שלכל A ו-𝜆 מתקיים: A∙=𝜆∙.
2. שני וקטורים מהמרחב העצמי v1 ו- v2מקיימים: 2,A∙v2=𝜆∙v A∙v1=𝜆∙v1. ואם נחבר ביניהם נקבל: A(v1+v2) = 𝜆(v1+v2) ולכן גם הוקטור v1+v2VA(𝜆) כנדרש.
3. וקטור מהמרחב העצמי v מקיים: A∙v=𝜆∙v. אם נכפיל בסקלר 𝛼 נקבל: 𝛼∙A∙v=𝛼∙𝜆∙v. מכיוון ש- 𝛼סקלר ניתן לסדר כך: A(𝛼∙v) = 𝜆(𝛼∙v) ולכן גם הוקטור 𝛼∙vVA(𝜆) כנדרש.

## דמיון מטריצות

יהי מטריצות A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר גודל n x n. מטריצות אלו יקראו "מטריצות דומות" אם קיימת מטריצה P הפיכה כך שמתקיים: B = P∙A∙P-1. במידה וכן נאמר שמטריצה A דומה למטריצה B, ונסמן: A~B. אך אם לא קיימת מטריצה כזאת, נאמר שהמטריצות לא דומות.

יחס הדמיון מקיים:

1. רפלקסיביות - לכל מטריצה A מתקיים: A~A.
2. סימטריות - אם A~B אז גם B~A.
3. טרנזיטיביות - אם A~B ו-B~C אז גם A~C.

המסקנה מקיום שלושה תנאים אלו הוא שיחס הדמיון במטריצות הוא יחס שקילות. המשמעות של יחס שקילות לענייננו הוא שניתן לחלק את קבוצת כל המטריצות שהן מאותו סדר גודל n x n למחלקות שקילות. שתי מטריצות מאותה מחלקת שקילות הן דומות, ואילו שתי מטריצות שאינן מאותה מחלקה אינן דומות. מחלקות השקילות אינן באותן גודל, לדוגמא: מטריצת היחידה I דומה אך ורק לעצמה.

## תכונות

אם A ו-B מטריצות דומות A~B כך שמתקיים: B = P∙A∙P-1, אזי:

1. הדטרמיננטות שלהם שוות det(A) = det(B).
2. העקבה שלהם שווה tr(A) = tr(B). עקבה (trace) של מטריצה היא סכום האיברים של האלכסון הראשי.
3. יש להם את אותו הפולינום האופייני PA(𝜆) = PB(𝜆). כתוצאה מכך הם חולקים את אותם ערכים עצמיים **עם אותם ריבויים אלגבריים וריבויים גאומטריים**. \*וכן שני התכונות הקודמות נובעות מכך.
4. אם v הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי 𝜆, אזי P∙v הוא וקטור עצמי של B עם ערך עצמי 𝜆. A∙v = 𝜆∙v B(P∙v) = 𝜆(P∙v).

**אזהרה!** משפטים אלו הם לא "אם ורק אם", כלומר יכול להיות שהדטרמיננטות או העקבה או הפולינום האופייני של שתי מטריצות יהיו שוות אך הן לא בהכרח יהיו גם דומות.

## משמעות דמיון מטריצות

המשמעות של מטריצות דומות הוא שהם מייצגות את אותה העתקה לינארית אך לפי בסיסים שונים.

כלומר, אם קיימים שני מרחבים וקטוריים V ו-W מאותו הגודל n והעתקה לינארית F ביניהם F: V -> W. כמו שכבר ציינו לכל מרחב וקטורי יכולים להיות מספר בסיסים שונים אך עם אותו מספר וקטורים. נגדיר שלמרחב V ולמרחב W יש את אותם בסיסים E ו-B (E הוא וקטורי הבסיס הסטנדרטי בגודל n ). בנוסף נגדיר וקטור v ב-V ווקטור w ב-W שהוא הוקטור המתאים לו לפי העתקה הלינארית f(v) = w. נשים לב כי לכל אחד מהוקטורים v, w יש שני סוגים של וקטור קואורדינטות: [v]E, [v]B, [w]E, [w]B,. אזי קיימות מספר מטריצות מייצגות לפי הבסיסים השונים של העתקה הלינארית ,F באמצעותן ניתן לחשב את וקטורי הקואורדינטות של w: [w]E = [F]EE∙[v]E, [w]B = [F]BB∙[v]B.

הכלל הוא שתמיד מטריצות מייצגות לפי בסיסים אלו כמו: [F]EE ו-[F]BB הם מטריצות דומות, מפני שהן מייצגות את אותה העתקה לינארית F, אך לפי בסיסים שונים. ניתן לראות שהן דומות מכך שאם ננסה לחשב מטריצות אלו לפי השיטה השנייה שלמדנו למציאת מטריצה מייצגת לפי בסיסים, נקבל: [F]BB = PB<-E∙C∙PE<-B. כאשר ניתן להסתכל על C כאל המטריצה המייצגת לפי הבסיסים [F]EE, כך שבעצם מתקיים: [F]BB = PB<-E∙[F]EE ∙PE<-B. שזוהי בדיוק ההגדרה של דמיון מטריצות!

לעיתים כאשר נעשה פעולות בהעתקה לינארית, ונרצה להשתמש במטריצה מייצגת לפי בסיס אחר ממה שנתון (בדר"כ מטעמי נוחות), אזי תמיד נדע שהקשר בין כל המטריצות המייצגות לפי הבסיסים השונים של ההעתקה הלינארית הוא שהן דומות.

## מטריצה לכסינה

מטריצה ריבועית תקרא "מטריצה לכסינה" אם היא דומה לאיזו מטריצה אלכסונית. מטריצה אלכסונית היא מטריצה ריבועית שכל איבריה חוץ מאלכסון ראשי שווים ל-0[[3]](#footnote-3). במילים אחרות, אם A היא מטריצה ריבועית אז A תקרא "לכסינה" אם מתקיים A = P∙D∙P-1. כאשר P היא מטריצה הפיכה, ו-D היא מטריצה אלכסונית.

מסתבר שיש קשר בין דמיון מטריצות ומטריצה לכסינה לערכים עצמיים ווקטורים עצמיים. כדי למצוא את P ו-D יש למצוא את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של המטריצה A. מטריצה P תהיה מטריצה שהעמודות שלה הם הוקטורים העצמיים של מטריצה A, מטריצה זו נקראת גם "מטריצה מלכסנת". ומטריצה D תהיה מטריצה אלכסונית שכל האיברים שלה באלכסון ראשי הם הערכים העצמיים של A. חשוב לשים לב כשבונים את P ו-D שהמיקום של הערכים העצמיים מקביל לוקטורים העצמיים המתאימים להם.

נמצא אם כן, שהמסקנה העולה ממשפט זה הוא שמטריצה לכסינה אם ורק אם יש לה n וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית. במקרה שריבוי אלגברי של 𝜆 גדול מ-1 אזי הריבוי הגיאומטרי צריך להיות שווה לריבוי האלגברי כדי שהמטריצה תהיה לכסינה, במידה והם אינם שווים המטריצה אינה לכסינה.

כשנתבקש "ללכסן את A", הכוונה זה למצוא מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך שמתקיים: A = P∙D∙P-1, וכבר למדנו שנעשה זאת באמצעות כך שנמצא קודם את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של A.

### שיטה לבדיקת דמיון מטריצות

שיטה לדעת אם שתי מטריצות דומות או שאינן דומות אומרת כך:

1. אם מטריצה אחת לכסינה והשנייה לא - אזי המטריצות אינן דומות.
2. אם שתיהן לכסינות אז הן דומות אם ורק אם יש להן את אותם ערכים עצמיים עם אותם ריבויים אלגבריים וריבויים גאומטריים.
3. אם שתיהן לא לכסינות אזי צריך להשתמש בשיטת "צורת ז'ורדן" שאינה בחומר של הקורס.

## שימוש בלכסון מטריצות

נשים לב שכאשר מכפילים מטריצה אלכסונית שהאלכסון ראשי שלה הוא: a, b, c. עם מטריצה אלכסונית שנייה שהאלכסון ראשי שלה הוא: d, e, f. אזי מתקבלת מטריצה אלכסונית שהאלכסון ראשי שלה הוא: a∙d, b∙e, c∙f. כלומר כל איבר מוכפל באיבר המקביל לו כמו בכפל וקטורים. אותו עיקרון חל גם אם נעלה את המטריצה האלכסונית בחזקה או שורש. נשתמש בתכונה זו במקרים הבאים:

1. **חישוב חזקת מטריצה לכסינה** - אם A אינה מטריצה אלכסונית אך לכסינה כך שמתקיים: A = P∙D∙P-1 ונרצה לחשב An. אז במקום לחשב An = P∙D∙P-1∙P∙D∙P-1∙…∙P∙D∙P-1, נשים לב כי D∙P-1∙P = D, לכן אם נחליף כל ביטויים אלו ב-D נקבל את המשוואה: An = P∙Dn∙P-1. שלפי התכונה שלמדנו יהיה הרבה יותר קל לחשב.
2. **חישוב שורש מטריצה לכסינה** - אם A אינה מטריצה אלכסונית אך לכסינה כך שמתקיים: A = P∙D∙P-1 ונרצה לחשב . נשים לב כי זוהי מטריצה B כך ש-Bn = A, יכול להיות כמה כאלו. בצורה דומה למה שלמדנו קודם במקום לחשב בדרך הארוכה נוכל לחשב פשוט את המשוואה: = P∙∙P-1

1. משפט העקרונות השקולים אומר כך: תהי A מטריצה ריבועית מסדר גודל n x n, אזי התנאים הבאים הם שקולים, כלומר או שכולם מתקיימים או שכולם לא מתקיימים:

   A הפיכה.

   det(A) 0 .

   העמודות של A בלתי תלויים לינארית.

   השורות של A בלתי תלויים לינארית.

   יהי b וקטור כלשהו של מספרים, אזי למערכת A∙x = b יש פתרון יחיד.

   **0 אינו ערך עצמי של המטריצה.** [↑](#footnote-ref-1)
2. משפט בזו אומר אם שורש הפולינום p(x) הוא a אזי חלוקת הפולינום ב-(x-a) תהיה ללא שארית. וכן ההיפך, אם פולינום מתחלק ב-(x-a) ללא שארית אז a הוא שורש הפולינום. [↑](#footnote-ref-2)
3. בדרך כלל נסמן מטריצה אלכסונית ב-D מהמילה Diagonal. כל מטריצה אלכסונית היא גם לכסינה, מפני שניתן לקיים את המשוואה A = P∙D∙P-1 על ידי שנבחר P מטריצת היחידה שההופכית שלה גם היא מטריצת היחידה, וכן נבחר את D בתור המטריצה האלכסונית A עצמה, כך שהכפלתה במטריצות היחידה תיתן שוב את A שזה בדיוק מה שאומרת המשוואה. [↑](#footnote-ref-3)